Physik II - Fynn Krebser
fkrebser@student.ethz.ch

Wellen

Einleitung

Def. (Welle) Zeitliche und räumliche Störung eines Mediums.

Def. (Transversal) Störung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Def. (Longitudinal) Störung parallel zur Ausbreitungsrichtung.

Wellentypen

Def. (Wellenfunktion) $\xi = \xi(x,t)$ beschreibt die Auslenkung der Welle.

Def. (Dispersion) Veränderung der Form des Wellenberges.

Dispersion wird im folgenden vernachlässigt.

Satz $+$ nach Links, $-$ nach Rechts

$$\xi(x,t) = f(x \pm vt).$$

Def. (Phasengeschwindigkeit) v in der obigen Gleichung.

Def. (Harmonische Welle) $\xi(x,t) = \xi_0 \sin(k(x \pm vt))$

Satz

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Satz

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx \pm \omega t + \phi_0).$$

Satz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = vk.$$

Satz (Wellengleichung)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0.$$

Satz (Lösungen der Wellengleichung) Für f, g beliebig löst folgendes die Wellengleichung

$$\xi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt).$$

Satz (Transversalwelle)

$$\xi(z,t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz - \omega t).$$

Satz (Phasengeschwindigkeit Seilwelle)

$$v = \pm\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \pm\sqrt{\frac{T}{\rho A}}.$$

T: Tension, μ: lineare Massendichte.

Def. (Ebene Welle) Der Geometrische Ort Oszillatoren gleicher Phase ist eine Ebene senkrecht zu $\mathbf{v}$.

$$\xi(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t).$$

Def. (Verschiebungsvektor)

$$\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Satz (Transversale Welle)

$$\xi(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\Delta\delta} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)}. \tag{1}$$

Def. (Lineare Polarisation) $\Delta\delta = 0$ oder π in Gleichung 1.

Def. (Zirkulare Polarisation) $\Delta\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ und $A_x = A_y$ in Gleichung 1.

Def. (Zirkulationsrichtung) Rechtszirkular: $\Delta\delta = \frac{\pi}{2}$; Linkszirkular: $\Delta\delta = -\frac{\pi}{2}$.

Def. (Elliptische Polarisation) Alle anderen Fälle von $\Delta\delta$ und A_x, A_y in Gleichung 1.

Konzept (Polarität bestimmen) Für Polarisationsrichtung: Daumen in Wellenrichtung, Korkenzieher zeigt in Rechtszirkular für fixiertes z.

Def. (Wellengleichung im Raum)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 \xi = 0.$$

Bsp. (Kugelwelle)

$$\xi(\mathbf{r},t) = \frac{\mathbf{A}_1}{r} f_1(kr - \omega t) + \frac{\mathbf{A}_2}{r} f_2(kr + \omega t).$$

Faktor $\frac{1}{r}$ zeigt, dass Amplitude mit Abstand abnimmt. In 2 Dimensionen wäre die Amplitude proportional zu $r^{-0.5}$

Satz (Energiedichte mechanischer Welle)

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \rho v^2 \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}(x - vt)}\right)^2.$$

Setzt sich zu gleichen Teilen aus kinetischer und potentieller Energie zusammen.

Satz (Energiedichte harmonischer Welle)

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \rho\omega^2 A^2 \sin^2(k(x - vt)).$$

Satz (Mittlere Energiedichte harm. Welle)

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} \right\rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2.$$

Def. (Intensität) Leistung welche durch eine Fläche A pro Zeit t transportiert wird.

$$I = \frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}A\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} v.$$

Satz (Mittlere Intensität der harm. Welle)

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 v = \frac{1}{2}\rho\frac{\omega^3}{k} A^2.$$

Def. (Energieflussdichte)

$$\mathbf{S} = I\hat{n}.$$

Dies ist bekannt als Poynting-Vektor in der Elektrodynamik.

Def. (Energiestrom)

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \dot{W} = \iint_A \mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A}.$$

Superposition

Satz (Superposition) Seien ξ_1 und ξ_2 Lösungen der Wellengleichung, so ist auch $\xi = \xi_1 + \xi_2$ eine Lösung der Wellengleichung.

Def. (Kohärenz) Zeitlich: Nullphasenwinkel δ konstant; Räumlich: Wellefronten können überlappen

Def. (Gangunterschied)

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

x_1 und x_2 sind die Abstände zwischen Quelle und Messpunkt.

Satz (Superposition harm. Wellen) Gegeben ξ_1, ξ_2 gleicher Amplitude und Kreisfrequenz, so gilt

$$\xi = \underbrace{2A\cos\left(\frac{\delta + k\Delta x}{2}\right)}_{\text{Amplitude}} \underbrace{\sin\left(kx_1 - \omega t + \frac{\delta + k\Delta x}{2}\right)}_{\text{Harmonische Welle}}.$$

Die Amplitude ist Zeitunabhängig!

Def. (konstruktive Interferenz) Resultierende Welle hat doppelte Amplitude,

$$\frac{\delta + k\Delta x}{2} = n\pi.$$

Def. (destruktive Interferenz) Resultierende Welle verschwindet

$$\frac{\delta + k\Delta x}{2} = \frac{2n+1}{2}\pi.$$

Konzept Kohärenz ist notwendig für Interferenz. Glühlampen können daher nicht interferieren.

Reflexion und Transmission

Def. (Reflexion & Transmission) Trifft ein Medium auf eine Grenzfläche wird ein Teil durchgelassen (Transmission) und ein Teil wird zurücklaufen (Reflexion).

Satz ω bleibt konstant, v, k, λ ändern sich.

Satz (Die Drei Wellenfunktionen)

$$\begin{aligned} \xi_A &= A\exp(i(+k_1 x - \omega t)) \\ \xi_R &= R\exp(i(-k_1 x - \omega t + \delta_R)) \\ \xi_T &= T\exp(i(+k_2 x - \omega t + \delta_T)). \end{aligned}$$

Satz (Amplitudenstetigkeit)

$$\lim_{x\to 0_-}(\xi_A + \xi_R) = \lim_{x\to 0_+}\xi_T.$$

Satz Eine zweite Randbedingung aus z.B. einer Kraftbilanz an der Grenzfläche löst das Problem vollständig und liefert R und T.

Bsp. (Seilwelle)

$$S_1 \left.\frac{\partial \xi_A}{\partial x}\right|_{x=0} + S_1 \left.\frac{\partial \xi_R}{\partial x}\right|_{x=0} = S_2 \left.\frac{\partial \xi_T}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

Satz

$$T\sin\delta_T = R\sin\delta_R.$$

Def.

$$\alpha := \frac{k_2 S_2}{k_1 S_1} = \sqrt{\frac{S_2\rho_2}{S_1\rho_1}}.$$

Satz

$$\delta_T = 0, \quad \delta_R = \begin{cases} 0 & \alpha < 1 \\ \pi & \alpha > 1 \end{cases}.$$

Satz

$$R = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \quad T = \frac{2}{1+\alpha}.$$

Kehren wir kurz zur Seilwelle zurück, so gilt

Def. (Offenes Ende)

$$\alpha = 0 \Rightarrow R = 1, T = 2.$$

Das Seil kann frei am Ende schwingen.

Def. (Festes Ende)

$$\alpha \to \infty \Rightarrow R = -1, T = 0.$$

Das Seil ist am Ende festgehalten.

Stehende Wellen

Satz (Superposition von Gegenläufigen Wellen) Gegeben, $\xi_1 = A\cos(kx - \omega t)$ und $\xi_2 = A\cos(-kx - \omega t + \delta_R)$, so gilt

$$\xi = 2A\cos\left(kx - \frac{\delta_R}{2}\right)\sin\left(\omega t - \frac{\delta_R}{2}\right).$$

Def. (Stehende Welle) Eine Welle, welche nicht mehr fortschreitet, sondern an einem Ort oszilliert. Sie ist gekennzeichnet durch Knoten (Orte, an welchen die Amplitude immer Null ist) und Bäuche (Orte, an welchen die Amplitude maximal wird).

Satz (Reflexion am harten Medium) $\alpha \to \infty$ führt zu $\delta_R = \pi$ und damit

$$\xi = 2A\sin(kx)\sin(\omega t).$$

Garantierter Knoten an der Grenzfläche ($x = 0$).

Satz (Reflexion am weichen Medium) $\alpha = 0$ führt zu $\delta_R = 0$ und damit

$$\xi = 2A\cos(kx)\sin(\omega t).$$

Garantierter Bauch an der Grenzfläche ($x = 0$).

Bsp. (Energiedichte mit hartem Medium)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V} &= 2\rho A^2\omega^2\sin^2(kx)\cos^2(\omega t) \\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}V} &= 2\rho A^2\omega^2\cos^2(kx)\sin^2(\omega t). \end{aligned}$$

Für $\omega t = n\pi$ ist die Energie vollständig kinetisch, für $\omega t = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ist die Energie vollständig potentiell.

Satz (Einhüllende stehender Wellen)

$$u(x) = u_0\cos(kx + \varphi) = A\cos(kx) + B\sin(kx).$$

Die Konstanten werden durch die Randbedingungen bestimmt.

Satz (Beidseitig fixierte Saite) Es gilt $u(x=0) = u(x=L) = 0$, somit $A = 0$ und $kl = n\pi$, also

$$k_n = \frac{n\pi}{l}$$

$$\omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{S}{\rho}}.$$

Satz (Einseitig fixierte Saite) Es gilt $u(x=0)=0$ und $\frac{\partial u}{\partial x}(x=L)=0$, somit $A=0$ und $kl=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, also

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}$$

$$\omega_n = k_n v = \frac{(2n+1)\pi}{2l}\sqrt{\frac{S}{\rho}}.$$

Dopplereffekt

Satz (Dopplereffekt)

$$f_B = f_Q \frac{u+v_B}{u+v_Q}.$$

u: Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, v_B: Geschwindigkeit des Beobachters, v_Q: Geschwindigkeit der Quelle. $v_Q \geq 0$ falls Quelle sich wegbewegt, $v_B \geq 0$ falls sich Quelle zum Beobachter hinbewegt.

Elektrostatik

Die elektrische Ladung

Def. (Elektrische Ladung) Eigenschaft eines Körpers welche positiv oder negativ ist. Gleiches Vorzeichen stößt sich ab, unterschiedliches Vorzeichen zieht sich an. Die Einheit ist C. Ladung taucht nur in diskretisierten Werten auf.

Satz (Ladungserhaltung) Die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems bleibt konstant.

Das Coulomb'sche Gesetz

Satz (Coulomb'sches Gesetz)

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21}.$$

ϵ_0: Permittivität des Vakuums, $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Satz (Superposition) Die Gesamtwirkung mehrerer Ladungen ist die Vektorsumme der Wirkungen der einzelnen Ladungen.

$$\mathbf{F}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{q_j q_i}{r_{ji}^2}\hat{\mathbf{r}}_{ji}.$$

Energie einer Ladungsverteilung

Satz (Arbeit an Ladung) Um Ladung aus dem unendlichen an eine bestimmte Stelle zu bewegen:

$$W = \int_\infty^{\mathbf{r}_{21}} -\mathbf{F}_{21}(r)\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}.$$

Satz (Energie einer Ladungsverteilung)

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{q_j q_i}{r_{ji}}.$$

Satz (Earnshaw-Theorem) Kein System stationärer Ladungen ist in einem stabilen Gleichgewicht unter der alleinigen Wirkung elektrischer Kräfte.

Das elektrische Feld

Def. (Elektrisches Feld)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_{0i}^2}\hat{\mathbf{r}}_{0i}.$$

Satz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \iff \mathbf{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\mathbf{F}}{q}.$$

Def. (Testladung) Infinitesimale positive Ladung q welche das Feld nicht beeinflusst.

Konzept (Feldlinien) Feldlinien zeigen die Richtung des elektrischen Feldes an. Je dichter die Feldlinien, desto stärker das elektrische Feld. Sie führen von positiven zu negativen Ladungen.

Satz (Feld einer Ladungsverteilung)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\mathrm{d}V'.$$

Für endliche Ladungsdichten konvergiert dieses Integral.

Das Gauss'sche Gesetz

Satz (Gauss'sches Gesetz)

$$\iint_{\partial V}\mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho \mathrm{d}V.$$

Satz (Gauss'sches Gesetz in Differentialform)

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Felder einfacher Verteilungen

Bsp. (Kugeloberfläche) Gauss'sche Fläche: Kugelschale

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & r<R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & r>R \end{cases}.$$

Bsp. (Unendlich Langer Draht) Gauss'sche Fläche: Zylinder

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{\mathbf{r}}.$$

Bsp. (Unendliche Ebene) Gauss'sche Fläche: Box mit einer Seite parallel zur Ebene

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}}.$$

Die Energie des elektrischen Feldes

Def. (Energiedichte des E-Feldes)

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2.$$

Satz (Energie der Ladungsverteilung)

$$U = \iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\mathrm{d}V.$$

Dies ist Äquivalent zur Formel für die Punktladungen.

Das elektrische Potential

Da $\oint E\cdot \mathrm{d}s = 0$ existiert ein Potential.

Def. (Potentialdifferenz)

$$\phi_{BA} = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s}.$$

Satz

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi.$$

Feldlinien zeigen in Richtung der Verringerung des Potentials.

Normalerweise setzen wir $\phi(\infty)=0$.

Satz (Potential mehrerer Ladungen)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}V'.$$

Satz (Energie einer Ladungsverteilung)

$$W = \frac{1}{2}\iiint_{\mathbb{R}^3}\phi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\mathrm{d}V.$$

Dies ist äquivalent zu den beiden anderen Formeln

Potentiale einfacher Verteilungen

Bsp. (Potentialdifferenz eines Plattenkondensators)

$$\phi_{BA} = E\Delta z.$$

Bsp. (Potential einer Punktladung)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

r: Distanz Punktladung - Testladung

Die Laplacegleichung

Satz (Poissongleichung)

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Satz (Laplacegleichung) Sind in einem Raum keine Ladungen vorhanden gilt

$$\nabla^2 = 0.$$

Elektrische Leiter

Leiter und Isolatoren

Def. (Leiter) Material in welchem sich Ladungen frei bewegen können.

Satz (Grundeigenschaften Leiter) Folgendes gilt:

1. $\mathbf{E}=0$ innerhalb,
2. $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{n}}$ ausserhalb,
3. $\rho = 0$ innerhalb,
4. ϕ ist konstant im Leiter,
5. Spitzeneffekt: Kleinerer Krümmungsradius $\implies$ höheres ρ,
6. Die Gesamtladung ist auf der Oberfläche.

Satz (Spitzeneffekt Quantitativ)

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

r_i: Krümmungsradius

Das allg. elektrostatische Problem

Konzept (allg. Problem) Sind alle Leiter im Vakuum müssen wir $\nabla^2\phi = 0$ mit Randbedingungen lösen. Mögliche Formen sind, ϕ_k für alle Leiter definiert, Q_k für alle Leiter definiert oder eine Mischung.

Typischerweise wird Leiter geerdet um Randbedingung festzusetzen ($\phi_k = 0$).

Def. (Influenz) Verschiebung von Ladungen durch externe Verteilung von Ladung.

Konzept (Leiter Laden) Durch Erdung eines Leiters unter Influenz kann eine Ladung Q abfliessen oder zugeführt werden, bis $\phi = 0$ gilt. Somit kann ein Leiter durch Erdung geladen werden.

Satz (Eindeutigkeitssatz) Es gibt genau eine Lösung der Laplacegleichung mit gegebenen Randbedingungen.

Faraday'sche Käfige

Def. (Faraday'scher Käfig) Ein abgeschlossener Leiter, welcher das Innere vor äußeren elektrischen Feldern schützt. Dies funktioniert, da das Elektrische Feld im Hohlraum, mit dem Eindeutigkeitssatz 0 sein muss.

Satz (Umschlossene Ladung) Eine Ladung in einem Faradayschen Käfig, lässt sich von aussen nicht lokalisieren, da das E-Feld Positionsunabhängig ist.

Kondensatoren

Def. (Kapazität)

$$C = \frac{Q}{\phi}.$$

Die Kapazität ist eine geometrische Eigenschaft.

Def. (Kondensator) Ein Kondensator ist ein Leiter, auf welchem Ladungen gespeichert sind.

Satz (Plattenkondensator) Gegeben zwei Platten mit Abstand $d \ll \sqrt{A}$, so gilt

$$C = \frac{A\varepsilon_0}{d}.$$

Satz (Energie des Kondensators)

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}.$$

Satz (Serienschaltung von Kondensatoren)

$$C = \sum_i C_i.$$

Satz (Parallelschaltung von Kondensatoren)

$$\frac{1}{C} = \sum\frac{1}{C_i}.$$

Elektrische Ströme

Der elektrische Strom

Def. (Strom) Eine Nettoladung in Bewegung

Def. (Stromstärke)

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nA\bar{v}q.$$

n: Anzahldichte der freien Ladungsträger, v: Driftgeschwindigkeit.

Konzept (Stromrichtung) Entgegen der physikalischen Realität fliesst Strom von + nach -.

Def. (Stromdichte)

$$\mathbf{J} = nq\bar{v}.$$

Satz (Strom durch Fläche)

$$I_A = \iint_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{da}.$$

Ladungserhaltung

Satz (Kontinuitätsgleichung)

$$\nabla \cdot J = -\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}.$$

Satz (Kontinuitätsgleichung in Integralform)

$$I_{\partial V} = \iint_{\partial V} \mathbf{J} \cdot \mathbf{da} = -\iiint_V \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}.$$

In einem stationären Zustand gilt $\nabla \cdot J = 0$.

Das Ohm'sche Gesetz

Konzept Bei einem realen Leiter ist $\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{ds} \neq 0$ da sonst kein Strom fliessen würde. Die Spannungsquelle erzeugt somit ein nicht-konservatives E-Feld.

Satz (Ohm'sches Gesetz)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

σ: Leitfähigkeit.

Def. (Widerstand)

$$R = \frac{V}{I}.$$

Weniger allgemeine Form des Ohm'schen Gesetzes

Satz (Widerstand eines Zylinders)

$$R = \rho \frac{l}{A}.$$

$\rho = \frac{1}{\sigma}$: spezifischer Widerstand.

Schaltkreise diskreter Komponenten

Satz (Knotenregel) Für einen Knoten in einem Schaltkreis gilt $\sum I_i = 0$.

Satz (Maschenregel) Für eine Masche in einem Stromkreis gilt $\sum V_i = 0$.

Hierfür ist wenn wir einen Widerstand in Stromrichtung durchlaufen V negativ, wenn wir eine Spannungsquelle in Stromrichtung durchlaufen V positiv.

Satz (Serienschaltung von Widerständen)

$$R = R_1 + R_2.$$

Satz (Parallelschaltung von Widerständen)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Satz (Spannungsquelle) Eine reale Spannungsquelle hat einen Innenwiderstand.

$$V = \epsilon - Ir.$$

ϵ: Elektromotorische Kraft.

Energieumwandlung von Strom

Satz (Joule'sche Wärme)

$$P = IV = I^2R = \frac{V^2}{R}.$$

Konzept Wenn eine 60 und 100 Watt Glühbirne in Serie geschalten werden, so leuchtet die 60 W Glühbirne heller da sie den grösseren Widerstand hat.

Schaltkreise mit Kondensatoren

Konzept Schaltkreise mit Kondensatoren werden mit Differentialgleichungen und den Kirchhoff'schen Regeln gelöst. Hierbei ist der Zusammenhang $I = \dot{Q}$ zentral.

Relativitätstheorie

Galilei'sche Relativität

Def. (Axiome der GR) 1. Zeit und Raum sind absolut. 2. Die physikalischen Gesetze sind Forminvariant in Inertialsystemen. 3. Es gibt kein bevorzugtes Inertialsystem.

Def. (Ereignis) Physikalischer Vorgang, welcher an einem Ort zu einer Zeit stattfindet.

Def. (Vierervektor)

$$x_E = x_E^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Def. (Boost) Transformation von einem Inertialsystem zu einem anderen, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bewegt.

$$\beta = \frac{\mathbf{v}}{c}.$$

Satz (Galileitransformation)

$$x'^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta^1 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta^2 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x^\mu.$$

Satz (Invarianten) Längen und Zeitintervalle sind invariant unter Galileitransformationen.

Grundlagen der SRT

Def. (Axiome der SRT) 1. Es gibt Inertialsysteme in welchen die Naturgesetze Forminvariant sind. 2. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist in allen Inertialsystemen gleich.

Uhren und Massstäbe

Def. (Messung) Eine Messung beginnt mit einem Startereignis und endet mit einem Stopereignis.

Satz (Zeitdilatation) Seien zwei Ereignisse, welche in K' am selben Ort stattfinden, so gilt

$$\Delta t = \gamma \Delta t'.$$

Das Zeitintervall ist in K' am kürzesten.

Satz (Längenkontraktion) Seien zwei Ereignisse, welche in K' gleichzeitig stattfinden, so gilt

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}.$$

Das Längenintervall ist in K' am längsten.

Satz (Lorentztransformation)

$$x'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} x^\mu.$$

Hierbei wird von K nach K' mit $+\beta$ geboostet. Rückrichtung: $-\beta$

Def. (Minkowski-Metrik)

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Satz (Geschwindigkeitsaddition) Für u, v parallel gilt:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}.$$

u: Geschwindigkeit eines Objekts in K, u': Geschwindigkeit des Objekts in K', v: Relativgeschwindigkeit zwischen K und K'.

Satz Raumzeitintervalle $\Delta s^2 = (c\Delta)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ sind Lorentzinvariant.

Def. Zeitartig: $\Delta s^2 > 0$, es gibt ein Inertialsystem, in welchem die Ereignisse am selben Ort stattfinden. Raumartig: $\Delta s^2 < 0$, es gibt ein Inertialsystem, in welchem die Ereignisse gleichzeitig stattfinden. Lichtkegel: $\Delta s^2 = 0$.

Satz (Steigung im Minkowski-Diagramm)

$$\tan \alpha = \frac{c}{v}.$$

Je schneller sich ein Objekt bewegt, desto steiler ist seine Weltlinie im Minkowski-Diagramm.

Energie, Impuls und Masse

Def. (Viererimpuls)

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}.$$

$E = m\gamma c^2$: Energie, $\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v}$: Impuls.

Satz

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2.$$

Satz (Energie-Impuls-Beziehung)

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4.$$

Def. (kinetische Energie)

$$E_{kin} = (\gamma - 1)mc^2.$$

Satz (Longitudinaler Dopplereffekt)

$$f = f^* \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

f^*: Frequenz der Quelle, f: Frequenz des Beobachters.

Satz (Transversaler Dopplereffekt)

$$f = \frac{f^*}{\gamma}.$$

Felder bewegter Ladungen

Magnetische Kräfte

Satz (Lorentzkraft)

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

B: Magnetisches Feld.

Satz (Ampère'sches Gesetz)

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{ds} = \mu_0 I.$$

μ_0: Permeabilität des Vakuums.

Ladungsinvarianz

Satz (Ladungsinvarianz) Die Ladung ist ein Lorentzskalar.

$$\iint_{\partial V(t)} \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{da} = \iint_{\partial V'(t')} \mathbf{E}'(t') \cdot \mathbf{da}'.$$

Transformationen elektrischer Felder

Satz

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad E'_\perp = \gamma E_\perp.$$

Herleitung via Plattenkondensator mit Boost parallel oder senkrecht zu den Platten.

Felder bewegter Ladungen

Wir betrachten eine Ladung q welche mit v entlang der x-Achse bewegt.

Satz (Feld einer bewegten Ladung)

$$\begin{aligned} E'_x &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma x'}{((\gamma x')^2+y'^2+z'^2)^{3/2}} \\ E'_y &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma y'}{((\gamma x')^2+y'^2+z'^2)^{3/2}} \\ E'_z &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma z'}{((\gamma x')^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Satz (Eigenschaften) 1. $\frac{E'_x}{E'_z} = \frac{x'}{z'}$ unabhängig von v.

2. Das Feld ist radial aber nicht mehr isotrop ($E_\perp > E_\parallel$). Somit ist $\nabla \times \mathbf{E}' \neq 0$.

Satz (Elektrisches Feld)

$$E' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta')^{3/2}}.$$

Felder beschleunigter Ladungen

Wir betrachten eine instantan beschleunigte Ladung q welche von v_0 auf 0 abgebremst wird mit $a = -\frac{v_0}{\tau}$, weit entfernt, viel später, sodass $r \sim cT \gg x_0$ gilt.

Satz

$$\frac{E_\theta}{E_r} = \frac{v_0 T\sin(\theta)}{c\tau}.$$

Satz Der radiale Anteil des Feldes ist stetig. $E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. Somit ist

$$E_\theta = -\frac{qa\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}.$$

Satz (Energiedichte des Tangentialfeldes)

$$U_{E_\theta} = \frac{\varepsilon_0}{2}\iiint_{R<r<R+c\tau} E_\theta^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{3}\frac{q^2a^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\tau.$$

Satz (Larmorleistung)

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2a^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}.$$

Kräfte auf bewegte Ladungen

Es ruhe ein Teilchen in K'.

Satz (Kräftetransformation)

$$F'_\parallel = F_\parallel, \quad F'_\perp = \gamma F_\perp.$$

Wechselwirkung bewegter Ladungen

Satz Ein Teilchen welches an einem Strom vorbeifliegt erfährt eine Kraft

$$F_y = \frac{qI}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{v}{d}.$$

Magnetische Felder

Definition des magnetischen Feldes

Def. (Biot-Savart Kraft)

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I(\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}).$$

Das Ampère'sche Gesetz

Das Vektorpotential

Das Biot-Savart'sche-Gesetz

Einige Beispiele

Satz (Unendlicher Draht)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}.$$

Relativistische Transformationen

Konstanten

$$\begin{aligned} c &= 2.998\times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ \varepsilon_0 &= 8.854\times 10^{-12}\,\mathrm{A\,s\,V^{-1}\,m^{-1}} \\ \mu_0 &= 1.257\times 10^{-6}\,\mathrm{V\,s\,A^{-1}\,m^{-1}} \\ e &= 1.602\times 10^{-19}\,\mathrm{C} \\ m_e &= 9.109\times 10^{-31}\,\mathrm{kg} \\ m_p &= 1.673\times 10^{-27}\,\mathrm{kg}. \end{aligned}$$

Mathematik

Vektoranalysis

Satz (Satz von Gauss)

$$\iint_{\partial V}\mathbf{F}\cdot\mathbf{da} = \iiint \nabla\cdot\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}V.$$

Satz (Satz von Stokes)

$$\int_{\partial A}\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{s} = \iint_A \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{da}.$$

Einige Integrale

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(a^2+x^2)}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + C \\ \int \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x &= \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C. \end{aligned}$$